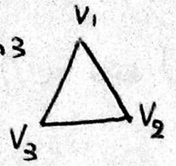
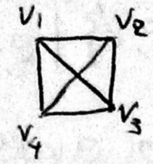
Θεωρία Γραφημάτων **ΜΑΘΗΜΑ: 4ο** 9/11/2018

Πλήρες γράφημα: κάθε ζευγάρι κορυφών, έχει μία ακμή που να τις συνδέει

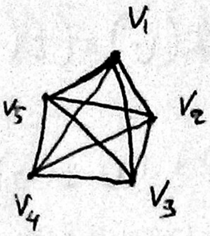
Παραδείγματα: K_3



K_4

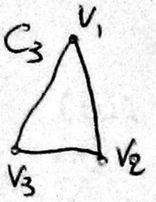


K_5

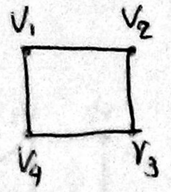


Κυκλικό γράφημα: Με μονοπάτι μήκους n, οι κορυφές μπορούν να απαριθμούνται κατά σειρά $v_1, v_2, \dots, v_n$

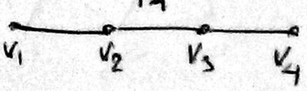
Παραδείγματα: C_3



C_4



Μονοπάτι: P_4



Πλέγμα: Ειδική μορφή γραφήματος με συγκεκριμένο τύπο

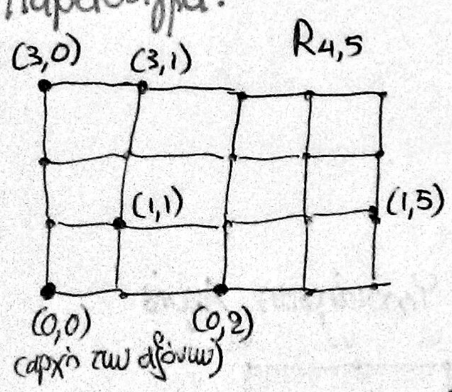
$X=\{x_1,\dots,x_p\}$ και $Y=\{y_1,\dots,y_p\}$

$R_{p,q}=(X\times Y)$, Αν $\{(x_i,y_j),(x_k,y_q)\}: |i-k|+|j-q|=1$

τότε τα σημεία (x_i,y_j) και (x_k,y_q) είναι γειτονικά

Παράδειγμα:

$R_{4,5}$



Για τα σημεία (3,0) και (3,1) έχουμε: $|3-3|+|0-1|=1$
άρα είναι γειτονικά

Για τα σημεία (0,0) και (0,2) έχουμε
$|0-0|+|0-2|=2\neq 1$
άρα δεν είναι γειτονικά

Για τα σημεία (1,1) και (1,5) έχουμε
$|1-1|+|1-5|=4\neq 1$
άρα δεν είναι γειτονικά

Άσκηση για να φέρουμε: Βρείτε τις τιμές $\delta(G)$ και $\Delta(G)$ για κάθε τιμή $p,q\geq 1$ στις εξής περιπτώσεις $G\simeq K_{p,q}$

$G\simeq R_{p,q}$

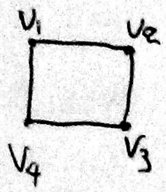
Γραμμικό Γράφημα: Το γραμμικό γράφημα ενός $G(V,E)$ ορίζεται ως εξής:

$$L(G)=(E(G), \{\{e,e'\} \mid e,e' \in E(G) \text{ και } e\cap e' \neq \emptyset\})$$

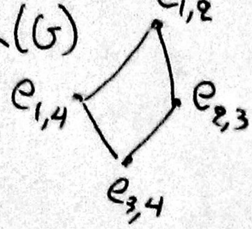
Δηλαδή οι κορυφές του $L(G)$ είναι οι ακμές του G και δύο κορυφές του $L(G)$ θα ενώνονται με ακμή αν και μόνο αν οι αντίστοιχες ακμές έχουν κοινό άκρο

Παραδείγματα:

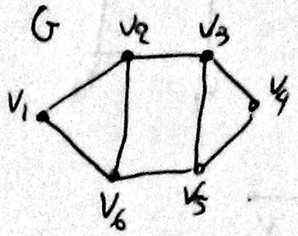
G



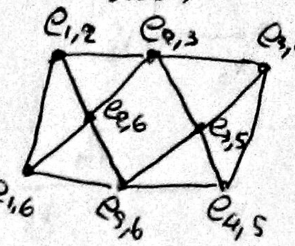
$L(G)$



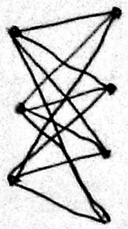
G



$L(G)$



$K_{3,4}$

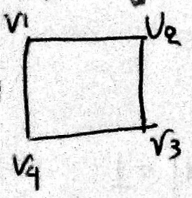


Συμπλήρωμα γραφήματος $\overline{G}$:

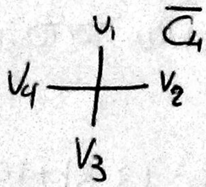
- Ίδιο σύνολο κορυφών
- ακριβώς εκείνες τις ακμές που δεν υπήρχαν στο G

Παραδείγματα:

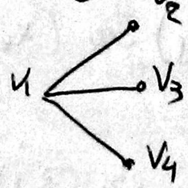
C_4



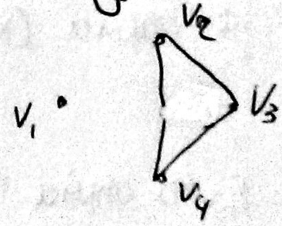
$\overline{C_4}$



G



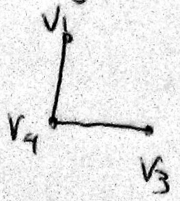
$\overline{G}$



Πράξεις κορυφών και ακμών:

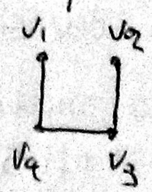
▶ Διαγραφή κορυφής $G-v$

$C_4 - v_2$

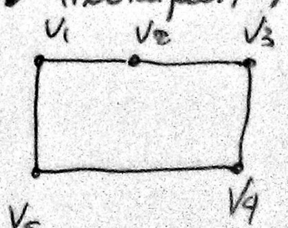


▶ Διαγραφή Ακμής

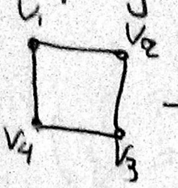
$C_4 - \{v_1, v_2\}$

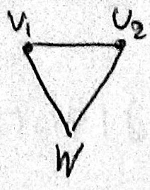


▶ Υποδιαίρεση Ακμής



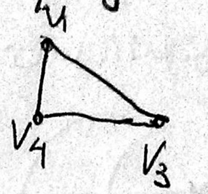
▶ Σύμπτυξη Ακμής:





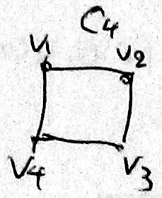
Θέλω να φύγει η $\{v\ v_3\}$
Φεύγει και τα άκρα τις ενώνονται

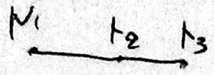
▶ Σύμπτυξη Κορυφής:



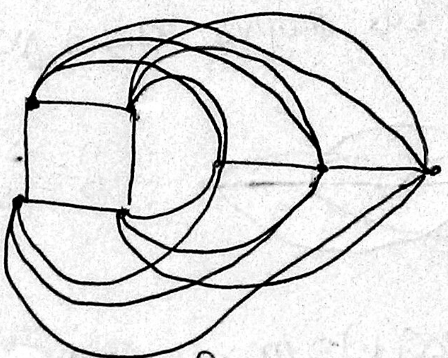
▶ Σύνδεση

$C_4 * P_3$





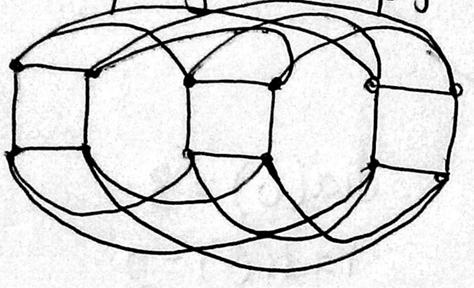
→



Συνδέσαμε κάθε κορυφή του C_4 με κάθε κορυφή του P_3

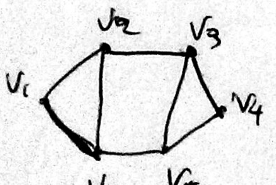
▶ Γινόμενο

$C_4 \times P_3$ Τοποθετώ το γράφημα C_4 στις θέσεις των κορυφών του P_3. Ενώνω τις ίδιες μεταξύ τους κορυφές



▶ Απόσταση $dist(x,y)$

Το μήκος του συντομότερου μονοπατιού



$dist(v_2, v_4) = 2$ $P=\{v_2, v_3, v_4\}$

$dist(v_3, v_6) = 2$ $P\ v_3, v_5, v_6\}$

$dist(v_1, v_4) = 3$ $P\ \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

Ισχύει η τριγωνική ανισότητα:

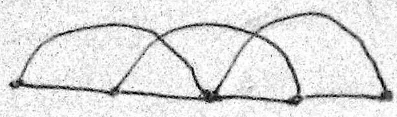
Για κάθε τριάδα κορυφών u, v, w ενός γραφήματος G, ισχύει:

$dist(u,v) + dist(v,w) \geq dist(u,w)$

Δυνάμεις ενός γραφήματος

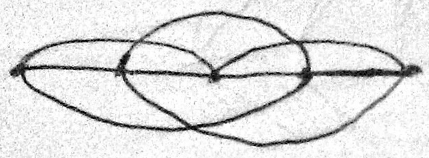
Δύναμη ενός γραφήματος G ορίζεται ως $G^k = (V(G), \{\{u,v\} \mid dist(u,v) \leq k\})$

P_5^2



Παίρνω το P_5 και παίρνω ακμές για να ενώσω κορυφές με απόσταση ≤ 2

P_5^3



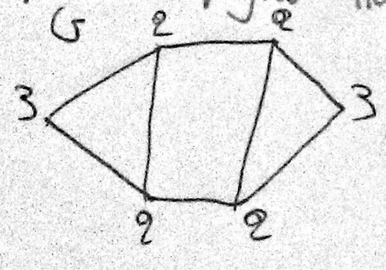
$P_5 = P_5^1$

Εκκεντρότητα: $ecc(v) = \max\limits_{u \in V(G)} dist(v,u)$

Διάμετρος: $dia(G) = \max\limits_{v \in V(G)} ecc(v)$

Ακτίνα: $rad(G) = \min\limits_{v \in V(G)} ecc(v)$

Εκκεντρότητα κορυφών: Παράδειγμα



$ecc(v_1) = 3$
$ecc(v_2) = 2$
$ecc(v_3) = 2$
$ecc(v_4) = 3$
$ecc(v_5) = 2$
$ecc(v_6) = 2$

$dia(G) = 3$
$rad(G) = 2$